Dualiteit

Raymond van Bommel

6 april 2010

1 Inleiding

Op veel manieren kan meetkunde worden bedreven. De bekendste en meest gebruikte meetkunde is de Euclidische meetkunde.
In dit artikel gaan we kijken naar de projectieve meetkunde, die in zekere zin op te vatten is als een uitbreiding van de Euclidische meetkunde. Er zal vooral worden gekeken naar het verschijnsel dualiteit. Dualiteit beschrijft hoe lijnen en punten in de projectieve meetkunde in zekere zin onderling verwisselbaar zijn.

2 De ééndimensionale projectieve ruimte

2.1 Definitie

In dit artikel zal een algebraïsche interpretatie van de projectieve meetkunde centraal staan. Er zijn echter ook axiomatische interpretaties van de projectieve meetkunde, die natuurlijk dezelfde resultaten opleveren.

Definitie 2.1 (Eéndimensionale projectieve ruimte)**.** De ééndimensionale projectieve ruimte is

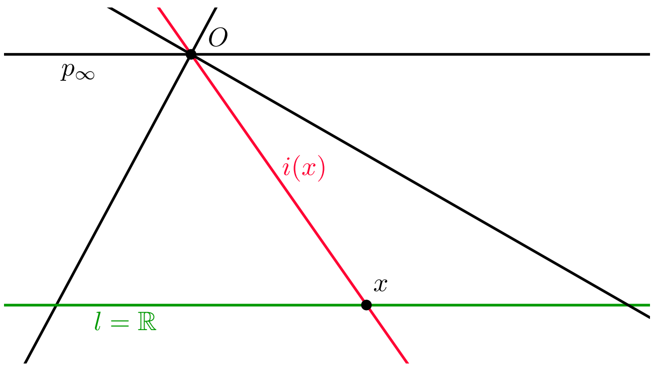
$$\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^2\right) := \left\{L : L \text{ is een lineaire ééndimensionale deelruimte van } \mathbb{R}^2\right\}.$$

Soms schrijft men ook wel $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

2.2 Het verband met $\mathbb{R}$

Wanneer we $\mathbb{R}$ beschouwen als meetkundig object zonder te kijken naar de algebraïsche (optel)structuren erop, zien we dat er een verband tussen $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$ bestaat. Door binnen de $\mathbb{R}^2$ een lijn l niet door de oorsprong te tekenen en deze te beschouwen als $\mathbb{R}$ kunnen we een correspondentie tussen $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$ maken. Bekijk de injectieve afbeelding

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R} &\to \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ x &\mapsto x\mathbb{R}. \end{aligned}$$



Figuur 1: de correspondentie tussen $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$.

Bijna alle deelruimten in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ hebben een origineel onder i, namelijk het snijpunt van die deelruimte met l mits dat bestaat. De enige deelruimte, die geen origineel heeft, is diegene, die in $\mathbb{R}^2$ een aan l evenwijdige lijn voorstelt. Omdat men zich kan voorstellen dat het snijpunt van deze deelruimte met l als het ware oneindig ver weg op l ligt, noemt men deze deelruimte ook wel p_∞. Nu geldt

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{p_\infty\}.$$

3 De tweedimensionale projectieve ruimte

3.1 Definitie

Op exact dezelfde wijze kan men de twee- en hogerdimensionale projectieve ruimtes definiëren. Ter illustratie volgt de definitie van de tweedimensionale projectieve ruimte.

Definitie 3.1 (Tweedimensionale projectieve ruimte)**.** De tweedimensionale projectieve ruimte is

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^3\right) := \left\{L : L \text{ is een lineaire ééndimensionale deelruimte van } \mathbb{R}^3\right\}.$$

Soms schrijft men ook wel $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Op exact dezelfde wijze is er een correspondentie tussen $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^2$, waaruit volgt dat $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Voor meer details zie [1, pag. 9].

3.2 Lijnen in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Door op te merken dat bijna alle tweedimensionale deelruimtes van $\mathbb{R}^3$ een vlak $A \subset \mathbb{R}^3$, niet door de oorsprong, snijden in een lijn, vinden we de volgende voor de hand liggende definitie van een lijn in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Definitie 3.2 (Lijn in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$)**.** Een deelverzameling $l \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ heet een lijn als er een tweedimensionale lineaire deelruimte $V \subset \mathbb{R}^3$ bestaat met

$$l = \{L : L \text{ is een lineaire ééndimensionale deelruimte van } V\}.$$

Aangezien elke tweedimensionale lineaire deelruimte $V \subset \mathbb{R}^3$ isomorf is met $\mathbb{R}^2$, kunnen we de lijnen dus zien als de imbeddingen van $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Ook is er duidelijk een één-op-één correspondentie tussen tweedimensionale $V \subset \mathbb{R}^3$ en lijnen $S \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

3.3 Het verband tussen punten en lijnen in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Geheel analoog aan de situatie in $\mathbb{R}^2$ kunnen we definiëren wanneer een punt en een lijn incident zijn.

Definitie 3.3 (Incidentie)**.** Een punt $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ en een lijn l in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ heten incident als geldt dat $p \in l$. In termen van de tweedimensionale lineaire deelruimte $V \subset \mathbb{R}^3$, die l bepaalt (als in definitie 3.2), betekent dat dat $p \subset V$.

Men kan zich nu afvragen wat de relatie is tussen de punten en lijnen van $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Het antwoord lijkt verrassend veel op de situatie in $\mathbb{R}^2$.

Stelling 3.4. *Zijn $p_1, p_2 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ twee willekeurige verschillende punten. Er bestaat precies één lijn l in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ zodanig dat zowel p_1 en l als p_2 en l incident zijn. Deze lijn wordt ook wel genoteerd als $\overline{p_1 p_2}$.*

Bewijs. Een bekend resultaat uit de lineaire algebra is dat twee verschillende ééndimensionale vectorruimtes p_1 en p_2 een tweedimensionale vectorruimte V voortbrengen. De tweedimensionale ruimte V is daarmee ook meteen de enige tweedimensionale ruimte, die p_1 en p_2 omvat.
Een direct gevolg is dat de lijn l corresponderend met V (als in definitie 3.2) de enige lijn is, die incident is met zowel p_1 als p_2. □

De situatie met twee lijnen en een snijpunt wijkt wel degelijk af van de situatie in $\mathbb{R}^2$.

Stelling 3.5. *Zijn l_1, l_2 twee willekeurige verschillende lijnen in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Er bestaat precies één punt $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ zodanig dat zowel p en l_1 als p en l_2 indicent zijn. Dit punt wordt ook wel genoteerd als $l_1 \cap l_2$.*

Bewijs. Zijn V_1 en V_2 de twee tweedimensionale deelruimtes van $\mathbb{R}^3$, die corresponderen met l_1 en l_2 (als in definitie 3.2). Er geldt dat $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cup V_2) \geqslant 2+2-3 = 1$. Omdat V_1 en V_2 verschillend zijn geldt ook dat $\dim(V_1 \cap V_2) < 2$. Nu volgt dat $p = V_1 \cap V_2 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ de enige ééndimensionale deelruimte van $\mathbb{R}^3$ is, die in zowel V_1 als V_2 bevat is.
Een direct gevolg is dat p het enige punt is dat zowel met l_1 als met l_2 incident is. $\square$

Hier verschijnt een vorm van symmetrie tussen lijnen en punten, die niet bestaat in $\mathbb{R}^2$. Het is nu namelijk zo dat twee punten precies één verbindingslijn hebben en twee lijnen precies één snijpunt.

4 Dualiteit

4.1 Enkele begrippen

Om het begrip dualiteit te kunnen introduceren zijn eerst wat definities nodig.

Definitie 4.1 (Duale ruimte)**.** De duale ruimte van $\mathbb{R}^n$ is per definitie

$$(\mathbb{R}^n)^* := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f \text{ is lineair}\}.$$

Het is duidelijk dat een functie $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ uniek vastgelegd wordt door de beelden van een basis van $\mathbb{R}^n$ te kiezen. Deze beelden zijn geheel vrij te kiezen in $\mathbb{R}$. Om die redenen weten we het volgende.

Feit 4.2. De duale ruimte $(\mathbb{R}^n)^*$ is een n-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte.

Aangezien $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ isomorf is met $\mathbb{R}^3$, ligt het voor de hand om projectieve meetkunde te gaan doen op $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$. Dit geeft als resultaat de duale projectieve ruimte.

Definitie 4.3 (Duale projectieve ruimte)**.** De tweedimensionale duale projectieve ruimte is

$$\mathbb{P}^{2*}(\mathbb{R}) := \left\{V : V \text{ is een lineaire ééndimensionale deelruimte van } \left(\mathbb{R}^3\right)^*\right\}.$$

4.2 Dualiteitsafbeelding

Er bestaat een relatie tussen de deelruimten van $\mathbb{R}^3$ en die van $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$.

Definitie 4.4 (Dualiteitsafbeelding)**.** De dualiteitsafbeelding D is een afbeelding die een lineaire deelruimte $V \subset \mathbb{R}^3$ stuurt naar

$$\left\{f \in \left(\mathbb{R}^3\right)^* : f|_V = 0\right\}.$$

We merken op dat we f nog vrij kunnen kiezen op $\mathbb{R}^3/V \cong \mathbb{R}^{3-\dim V}$, als we eisen dat $f|_V = 0$. Dat geeft in combinatie met feit 4.2 het volgende.

Feit 4.5. Het beeld $D(V)$ van een lineaire deelruimte $V \subset \mathbb{R}^3$ is een $(3 - \dim V)$-dimensionale lineaire deelruimte van $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$.

Het beeld van een punt $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ is dus een tweedimensionale deelruimte $D(p) \subset \left(\mathbb{R}^3\right)^*$, die wegens definitie 3.2 op te vatten is als een lijn in $\mathbb{P}^{2*}(\mathbb{R})$.
Omgekeerd is het beeld van een tweedimensionale ruimte $V \subset \mathbb{R}^3$, die natuurlijk vanwege definitie 3.2 correspondeert met een lijn l van $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, een punt $d(V) \in \mathbb{P}^{2*}(\mathbb{R})$. De dualiteitsafbeelding blijkt ook de projectieve structuur (incidentie) tussen punten en lijnen te behouden.

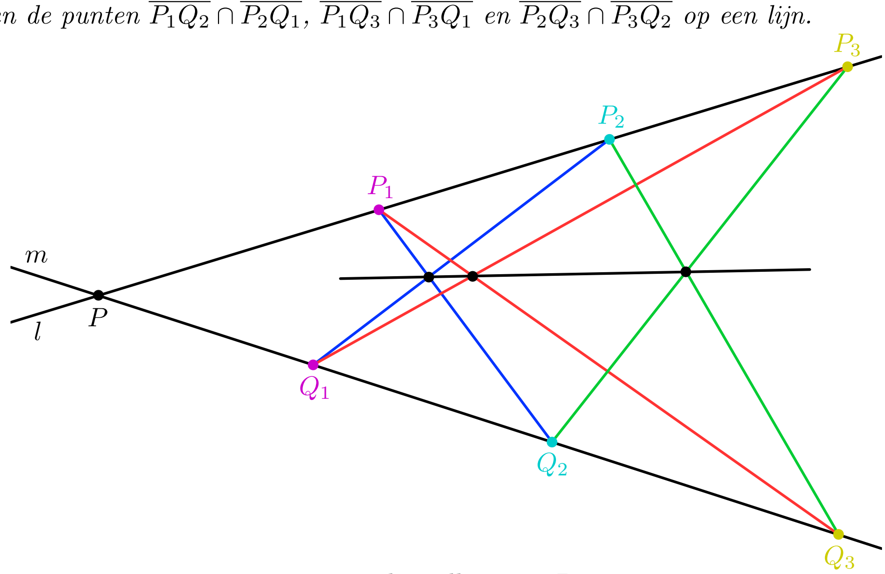
Stelling 4.6. *Zij $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ een willekeurig punt en zij l een willekeurige lijn in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Zij V bovendien de tweedimensionale ruimte, die correspondeert met l, en zij l' de lijn, die correspondeert met $D(p)$ (als in definitie 3.2). Dan geldt dat p en l incident zijn dan en slechts dan als $p' = D(V)$ en l' incident zijn.*

Bewijs. Stel dat p en l incident zijn. Per definitie van incidentie geldt $p \subset V$. Voor elke $f \in p'$ geldt dat $f|_V = 0$ en in het bijzonder dus dat $f|_p = 0$. Hieruit volgt dat $f \in D(p)$ en dus $p' \subset D(p)$. Nu geldt per definitie dat p' en l' incident zijn.
Stel dat p en l niet incident zijn. Dan geldt $p \not\subset V$ en dus $\exists r \in p \setminus V$. Zij $f \in p'$ nu zodanig dat $f(r) = 1$ (dit kan zo gekozen worden want $r \notin V$). Nu zien we dat $f \in p' \setminus D(p)$ en dus $p' \not\subset D(p)$. Nu geldt per definitie dat p' en l' niet incident zijn. □

5 Gevolgen van dualiteit

Het gevolg van stelling 4.6 is dat we stellingen in de projectieve meetkunde kunnen dualiseren. Dat wil zeggen dat we in zo'n stelling de woorden punt en lijn onderling kunnen verwisselen en dat de stelling dan nog steeds waar is.
Bij wijze van voorbeeld zullen we bekijken wat dat betekent voor de stelling van Pappos.

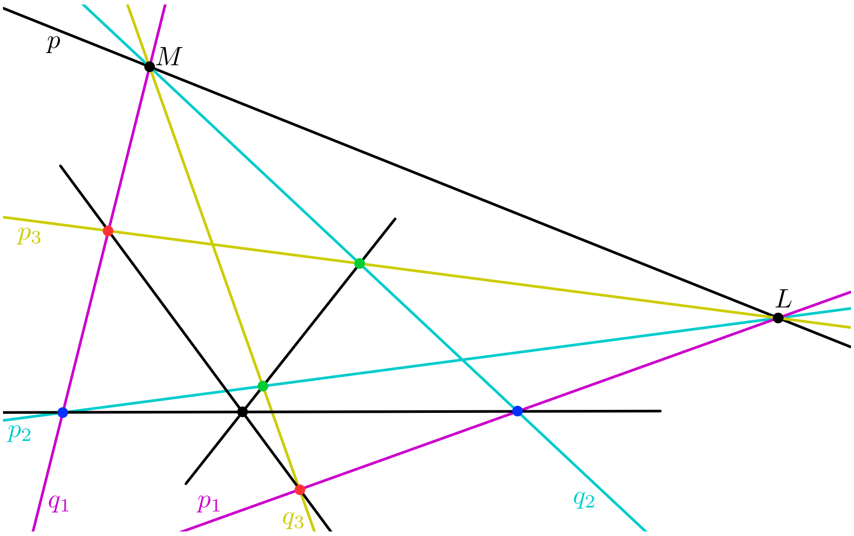
Stelling 5.1 (Pappos)**.** *Zijn l en m twee verschillende lijnen in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ en zij $P = l \cap m$ het snijpunt. Laat P_1, P_2 en P_3 drie verschillende punten zijn op l, ongelijk aan P. Laat Q_1, Q_2 en Q_3 drie verschillende punten op m zijn, ongelijk aan P.*
Dan liggen de punten $\overline{P_1Q_2} \cap \overline{P_2Q_1}$, $\overline{P_1Q_3} \cap \overline{P_3Q_1}$ en $\overline{P_2Q_3} \cap \overline{P_3Q_2}$ op een lijn.



Figuur 2: de stelling van Pappos.

Nu gaan we in de stelling van Pappos de woorden punt en lijn onderling verwisselen.

Stelling 5.2 (Pappos duaal)**.** *Zijn L en M twee verschillende punten in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ en zij $p = \overline{LM}$ de verbindingslijn. Laat p_1, p_2 en p_3 drie verschillende lijnen zijn door L, ongelijk aan p. Laat q_1 q_2 en q_3 drie verschillende lijnen door M zijn, ongelijk aan p.*
Dan gaan de lijnen $\overline{(p_1 \cap q_2)(p_2 \cap q_1)}$, $\overline{(p_1 \cap q_3)(p_3 \cap q_1)}$ en $\overline{(p_2 \cap q_3)(p_3 \cap q_2)}$ door één punt.



Figuur 3: de duale van de stelling van Pappos.

Bewijs. De lijnen l en m, die corresponderen (als in definitie 3.2) met $D(L)$ respectievelijk $D(M)$ zijn verschillend. Zijn V_{p_i} en V_{q_i}, voor elke $i \in \{1,2,3\}$, de deelruimtes van $\mathbb{R}^3$, die corresponderen met respectievelijk p_i en q_i.
Wegens stelling 4.6 geldt voor elke $i \in \{1,2,3\}$ dat $P_i := D(V_{p_i})$ op l ligt. Analoog ligt het punt $Q_i := D(V_{q_i})$ voor elke $i \in \{1,2,3\}$ op m.
Zij S het snijpunt van $\overline{(p_1 \cap q_2)(p_2 \cap q_1)}$ en $\overline{(p_1 \cap q_3)(p_3 \cap q_1)}$. Wegens stelling 4.6 geldt dat de lijn s, die correspondeert met $D(S)$, door $\overline{P_1Q_2} \cap \overline{P_2Q_1}$ en $\overline{P_1Q_3} \cap \overline{P_3Q_1}$ gaat.
De stelling van Pappos geeft dat s en $\overline{P_2Q_3} \cap \overline{P_3Q_2}$ incident zijn. Stelling 4.6 geeft nu ten slotte dat S en $\overline{(p_2 \cap q_3)(p_3 \cap q_2)}$ incident zijn, zoals we wilden bewijzen. □

Referenties

[1] M. Lübke & H. Finkelnberg, *Projectieve Meetkunde*, 2009.